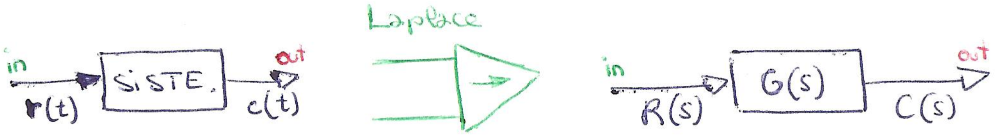
III. SISTEMAS AUTOMÁTICOS

14. LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

14.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Se define como función de transferencia [G(s)] de un sistema, al cociente entre las transformadas de Laplace de las señales de salida y de entrada.



dominio de (t) dominio complejo (s)

$$\boxed{G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}}$$

Las características de la función de transferencia solo dependen de las propiedades físicas del sistema, no de la señal de entrada.

La ~~transfom~~ función de transferencia viene expresada por un cociente de polinomios de variable compleja (s)(1). El denominador de la función de transferencia [D(s)] se denomina función característica, ya que determina las propiedades físicas de los componentes del sistema. Si la igualamos a cero obtenemos la ecuación característica del sistema.

(1) $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$

Las raíces de la ecuación característica se denominan $\boxed{\text{polos}}$ y tienen que ser más numerosos o igual que los ceros, es decir, las raíces del numerador.

$D(s) \Rightarrow$ f. característica $\qquad$ $D(s)=0 \Rightarrow$ ec. característica

$(d_1, d_2, d_3, \dots)$ Polos $\geq$ ceros $(n_1, n_2, n_3, \dots)$

10.2. OPERACIONES DE LOS DIAGRAMAS DE BLOQUES

Existen varias operaciones destinadas a simplificar la representación de un sistema complejo formado por numerosos bloques. Se pueden clasificar entre:

- op. en serie
- op. en paralelo
- op. en bucle cerrado
- op. de trasposición.

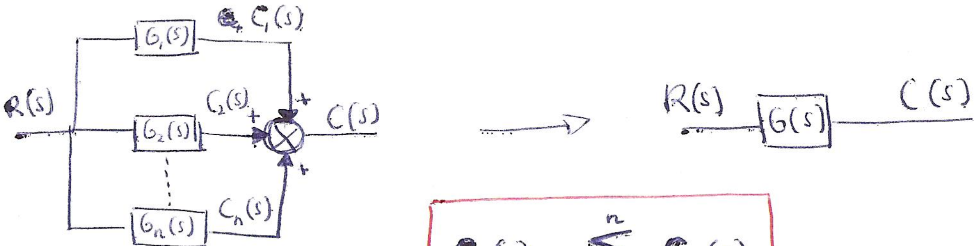
14.2.a. BLOQUES EN SERIE

La función de transferencia global para un sistema compuesto de (n) bloques en serie es igual al producto de las funciones de transferencia aislados.

$$\boxed{G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)}$$

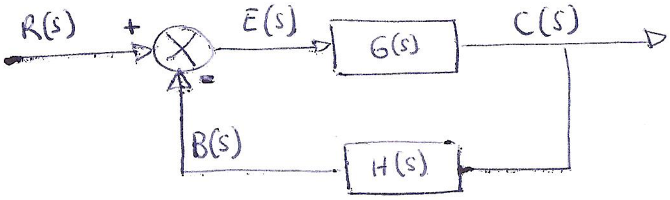
14.2.b. BLOQUES EN PARALELO

La función de transferencia global para un sistema compuesto de (n) bloques en paralelo es igual a la suma de las funciones de transferencia aislados.



$$\boxed{G(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s)}$$

14.2.c. SISTEMA EN BUCLE CERRADO



De un sist. en bucle cerrado se deducen las siguientes ecuaciones:

* $E(s) = R(s) - B(s)$
* $C(s) = E(s)\,G(s)$
* $B(s) = C(s)\,H(s)$

Mediante la resolución de ese sistema de ecuaciones, obtenemos su equivalencia:

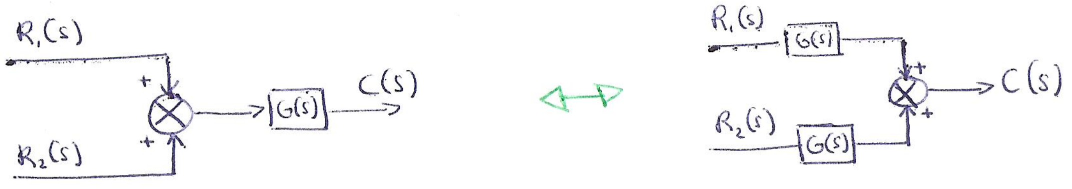
$$\boxed{M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

Cuando el comparador es  $\rightarrow \dfrac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$

14.2.d. TRANSPOSICIÓN DE SUMADORES Y BIFURCACIONES

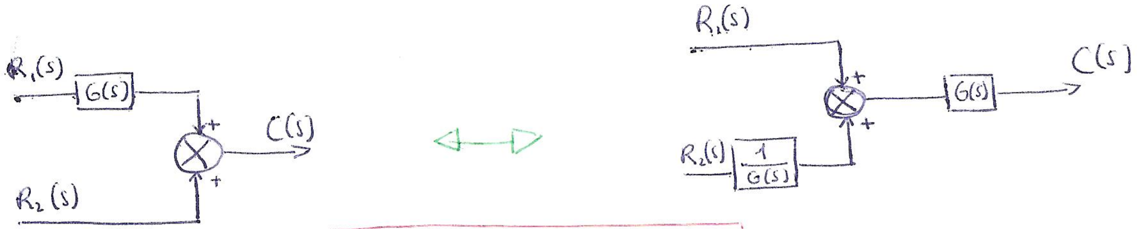
Existen dos métodos de trasposición de una suma:

1.)



$$\boxed{C(s) = [R_1(s)+R_2(s)]\,G(s)}$$

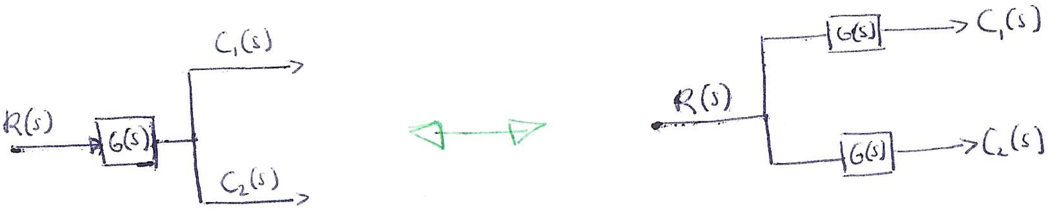
2.)



$$\boxed{C(s) = R_1(s)G(s) + R_2(s)}$$

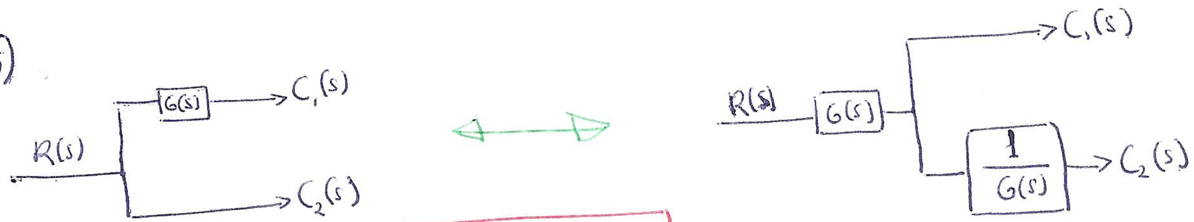
3.) Existen dos ejemplos de transposición de una bifurcación:

A)



$$\boxed{C_1(s) = C_2(s) = R(s)G(s)}$$

B)



$$\boxed{\begin{array}{l} C_2(s) = R(s) \\ C_1(s) = R(s)\,G(s) \end{array}}$$

14. 3. ESTABILIDAD

Un sistema estable es aquel que permanece en reposo a no ser que se excite por una fuente externa, en cuyo caso, alcanzará de nuevo el reposo cuando desaparezca la excitación.

En un sistema estable, cada entrada acotada, posee una salida acotada y predecible.

Para determinar si un sistema es estable existen varias condiciones que deben cumplir:

- Para que un sistema sea estable, sus polos (las raíces de la ecuación característica) deben ser menores que cero.

Existe distintos criterios de estabilidad, uno de ellos es:

Criterio de estabilidad de Routh

Según este criterio un sistema es estable cuando:

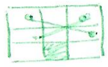
- Los coeficientes de la variable imaginaria (S) en la ~~ecuación~~ función característica $\boxed{D(s)}$ son todos $\boxed{\text{distintos de cero}}$ y de $\boxed{\text{igual signo.}}$
- Los valores de la primera columna de la tabla de Routh, poseen todos el mismo signo.

- Tabla de Routh:

Se usan tantas entradas como grados tenga la variable (s):

Ej: $$G(s) = \frac{1}{s^5 + s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 1}$$

$$a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 s^0$$



s^5	a_0 (1)	a_2 (3)	a_4 (2)
s^4	a_1 (1)	a_3 (5)	a_5 (1)
s^3	b_1^*	b_3^{Δ}	b_5
s^2	c_1	c_3	c_5
s^1	d_1	d_3	d_5
s^0	e_1	e_3	e_5

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_5 = \frac{a_1 \overset{0}{a_6} - a_0 \overset{0}{a_7}}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_5}{b_1} \qquad c_5 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_7}{b_1}$$

$d_1 = \dots$

$e_1 = \dots$

$n_1 = \dots$

14.4. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE REGULACIÓN

El régimen normal de trabajo del sistema no se produce inmediatamente después de aplicarle una entrada determinada, sino que existe una fase transitoria, de modo que a lo largo del tiempo se distingue entre:

- respuesta permanente: es la respuesta que ofrece un sistema cuando sus variables se han estabilizado y presenta un valor normal de funcionamiento.
- respuesta transitoria: se produce en un sistema cuyas variables ~~aún~~ aún no están estabilizadas es decir, no ha alcanzado un régimen permanente. Esta respuesta deja paso con el tiempo a la respuesta permanente

14.4.a. Función escalón unitario

Existen una serie de entradas teóricas que se utilizan para el estudio de las respuestas de los sistemas automáticos. Una de las más sencillas y representativas es la función escalón, definida como:

$$\boxed{\begin{cases} r(t)=K & \text{si } t \geq 0 \\ r(t)=0 & \text{si } t<0 \end{cases}}$$

Cuando el valor de la constante K es uno, se denomina función escalón unitario. Se sistema corresponde a una aplicación en un sistema corresponde a una variación instantánea del valor de la señal de entrada.

La transformada de Laplace de la función escalón unitario es $\boxed{\frac{1}{s}}$, de modo que para un sistema genérico el valor de la salida se obtiene:

$$R(s)=\frac{1}{s} \qquad G(s)=\frac{C(s)}{R(s)} \rightarrow \boxed{C(s)=G(s)\,R(s)=\frac{G(s)}{s}}$$

14.4.b. TIPOS DE SISTEMA. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Se denomina orden de un sistema el correspondiente a su función característica.

Según sea su orden pueden ser:

- Sistemas de orden cero: su función de transferencia no tiene ningún polo y, como para que sea posible un sistema, el orden del denominador ha de ser igual o mayor que el del numerador, la función de transferencia es una constante.
- Sistemas de primer orden: tienen un polo
- Sistemas de segundo orden: poseen dos polos
- Sistemas de orden superior: poseen más de dos polos.

Si el numerador de la función de transferencia es una constante, se denomina sistema de orden N simple.

Un sistema de primer orden posee un único polo, si este se encontrase en $s = -\frac{1}{T}$, la función de transferencia de dicho sistema sería:

$$G(s) = \frac{K}{s - \left(\frac{-1}{T}\right)} = \frac{KT}{1 + sT}$$

Si a este sistema se le aplica una entrada ~~[illegible]~~ del tipo función escalón unitario, la salida resultaría:

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{KT}{1+sT}\,\frac{1}{s} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{T}{1+sT}\right)$$

Si realizamos la antitransformada de Laplace para obtener la función en el campo real:

$$\boxed{c(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right)}$$

Se deriva de esta expresión que K es la constante que determina la amplitud final de salida en régimen estacionario, se llama constante dinámica del sistema al ser el valor de salida en régimen permanente cuando la entrada es una función escalón unitario.

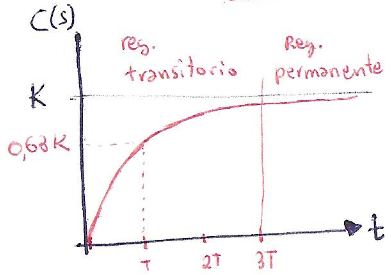
Si en la ecuación de salida el tiempo se hace T:

$$c(t) = K\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}632\,K$$

T se conoce como la constante de tiempo del sistema. Es el tiempo necesario para alcanzar el 63,2% de su valor final.

Aunque en sentido estricto, el valor K solo se alcanza en el infinito, se toma el tiempo $3T$ como inicio del régimen permanente.

Los polos del sistema indican su comportamiento en el régimen transitorio, es decir, marcan la dinámica del sistema, cuanto más alejado esté el polo del eje imaginario por el semiplano negativo, más rápida será la respuesta ($T \to -\infty$)



14.5. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS FÍSICOS

La función de transferencia representa un modelo matemático del sistema cuyo estudio se quiere realizar.

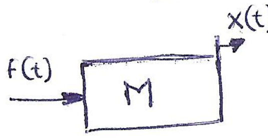
14.5.2. SISTEMAS MECÁNICOS

Para obtener la función de transferencia de un sistema mecánico, conviene descomponerlo en sistemas básicos relacionados entre sí y volver a unirlos una vez realizado el paso al plano complejo. Los componentes pueden ser:

- De traslación: fuerzas y variables se referencian a movimientos lineales de traslación y obedecen a la ecuación fundamental de la dinámica de traslación: $\sum F_i = m \cdot a$
- De rotación: fuerzas y variables se referencian a desplazamiento angulares que obedecen a la ecuación fundamental de traslación-rotación: $\sum M = I\alpha$
- De combinaciones de rotación-traslación.

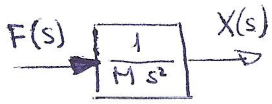
14.5.2.1. Sistemas mecánicos de traslación

El sistema más frecuente es una masa en reposo sobre la que se ejerce una fuerza:



$$f(t) = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longrightarrow F(s) = M\,s^2\,X(s)$$

Tras pasar la ecuación al plano complejo, lo podemos expresar en un diagrama de bloques:



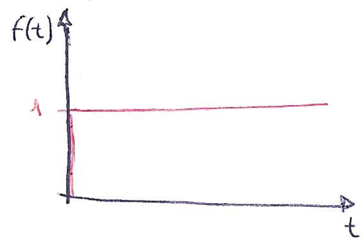
$$G(s) = \frac{1}{M s^2}$$

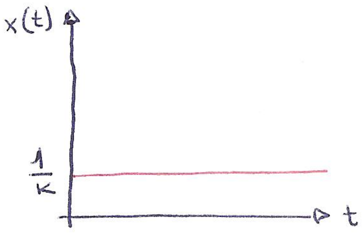
La función de transferencia es simple y de segundo orden.

Otro sistema muy frecuente es un muelle, que viene definido por: $f(t) = K\,x(t)$ que, mediante la transformada de Laplace, resulta: $F(s) = K\,X(s)$

De esta manera se deduce que la función de transferencia es $G(s) = \frac{1}{K}$

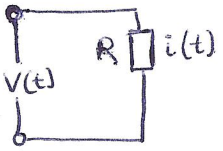
Si le aplicamos una entrada función escalón unitario, esto es: $F(s) = \frac{1}{s}$, o lo que es igual $f(t) = 1$, la salida que obtenemos es $X(s) = \frac{F(s)}{K} = \frac{1}{Ks}$, que en el plano real es $x(t) = \frac{1}{K}$.





14.5.b. SISTEMAS ELÉCTRICOS

- Sistema eléctrico con resistencia:

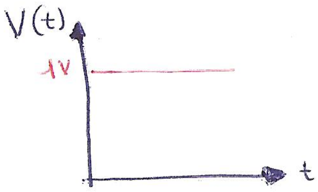


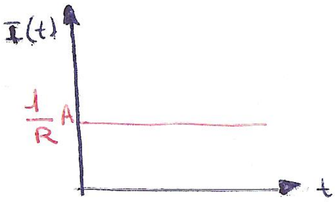
ec.: $v(t) = R\, i(t)$

transf: $V(s) = R\,I(s)$

Si introducimos al sistema una entrada función escalón unitario:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} \longrightarrow I(s) = V(s)\frac{1}{R} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{R} = \frac{1}{RS}$$



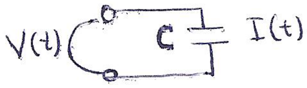


Cuando volvemos al plano real:

$v(t) = 1$

$I(t) = \frac{1}{R}$

- sistema eléctrico con condensador:



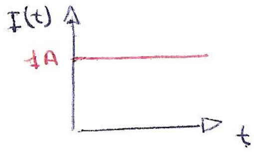
ec: $v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt + v(0^+)$ 0

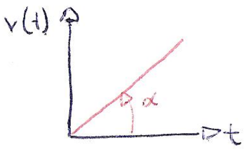
transf: $V(s) = \frac{1}{C}\,\frac{I(s)}{S}$

Como el condensador no puede sufrir cambios bruscos de voltaje, aplicamos como entrada la corriente e introducimos una entrada función escalón unitario:

$I(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow V(s) = I(s)\frac{1}{CS} = \frac{1}{S}\,\frac{1}{CS} = \frac{1}{CS^2} \Rightarrow V(t) = \frac{1}{C}t$

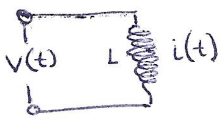
$I(t) = 1$





$tg\,\alpha = \frac{1}{C}$

- sistema eléctrico con bobina:



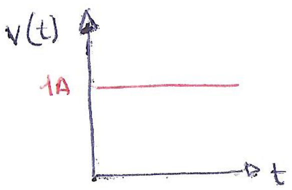
ec: $i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt + i(0^+)$ 0

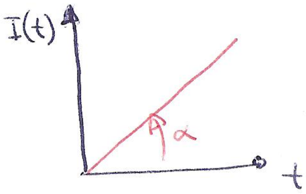
transf: $I(s) = \frac{1}{L}\,\frac{V(s)}{S}$

Si le introducimos una entrada función escalón unitario

$V(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow I(s) = V(s)\frac{1}{LS} = \frac{1}{S}\,\frac{1}{LS} = \frac{1}{LS^2} \Longrightarrow I(t) = \frac{1}{L}t$

$V(t) = 1V$





$tg\,\alpha = \frac{1}{L}$