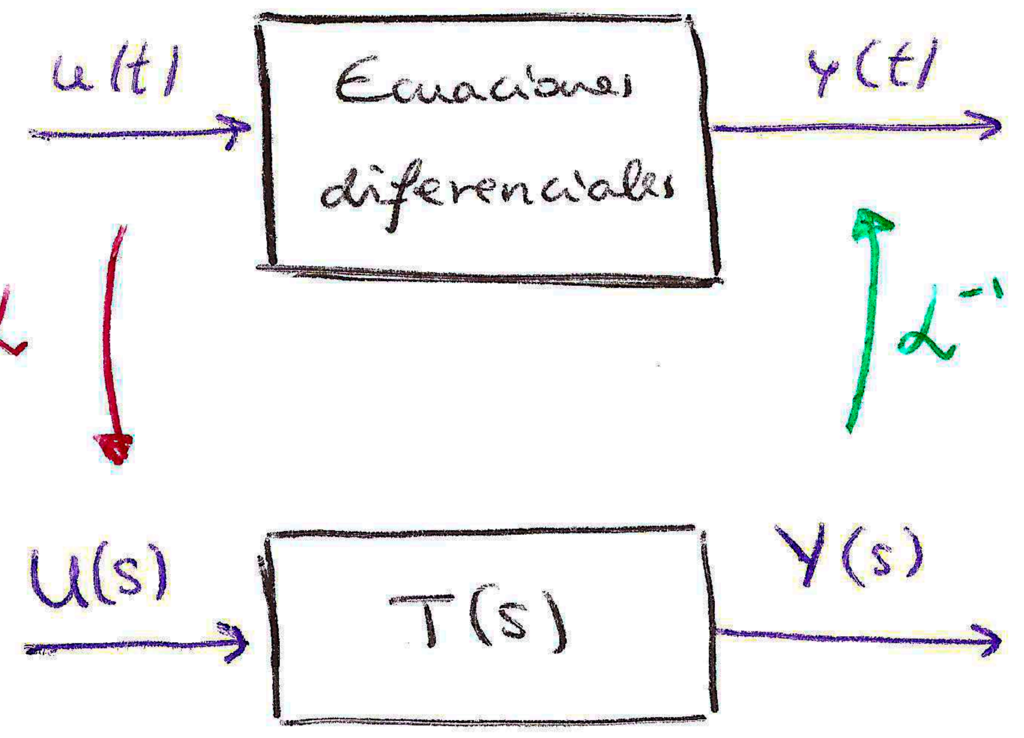
CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN RÉGIMEN TRANSITORIO

- Cuando trabajamos con dispositivos eléctricos resulta de gran relevancia el estudio de los fenómenos transitorios que tienen lugar al "encender" o "apagar" un elemento.

- Los fenómenos transitorios, si bien no afectan al estudio de potencia o energía, influyen de manera determinante en muchos artefactos.

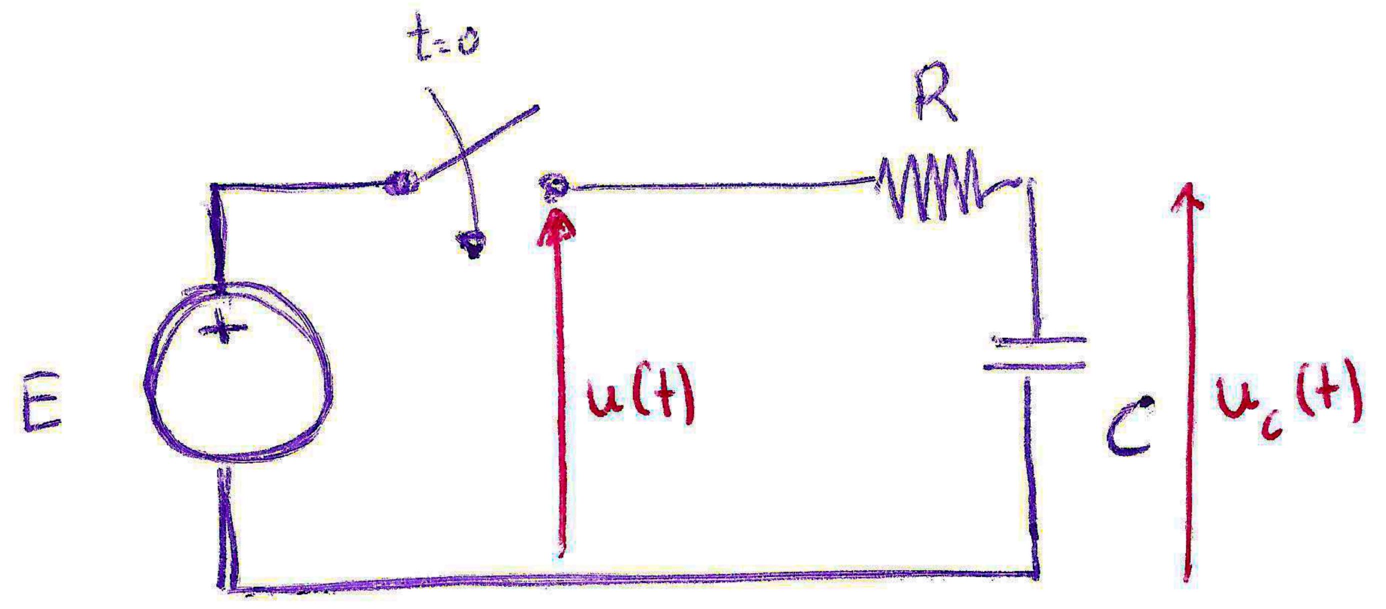
- Llamando $u(t)$ a la entrada que introducimos a nuestro circuito su respuesta $y(t)$ se compone de dos elementos: transitorio y permanente: $y(t) = y_t(t) + y_p(t)$



- Para simplificar el análisis de estos comportamientos transitorios empleamos la herramienta matemática de la transformada de Laplace.

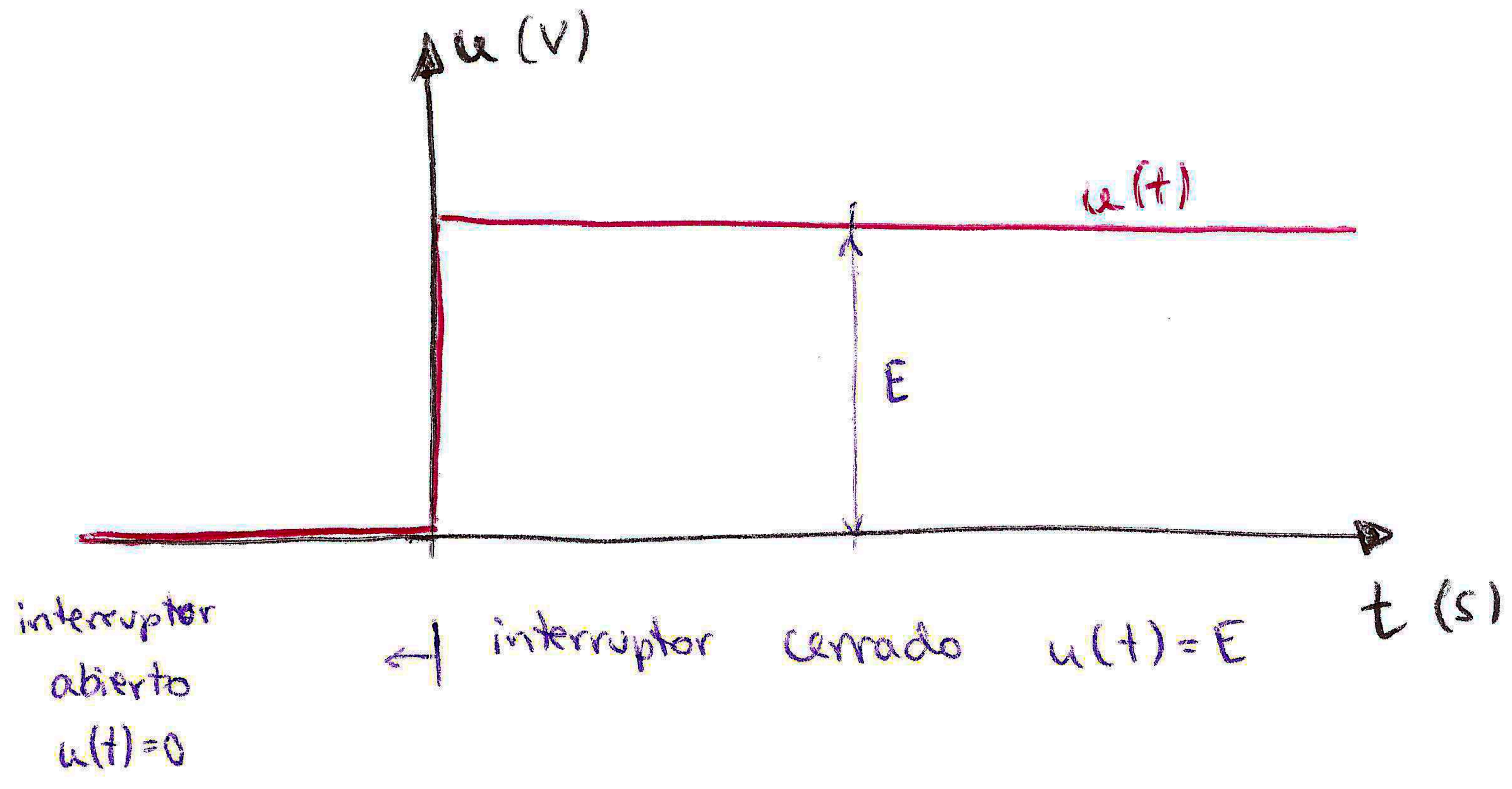
1. CIRCUITO RC SIN CONDICIONES INICIALES

- Para comprender el procedimiento de análisis que vamos a desarrollar utilizaremos el ejemplo de un circuito con alimentación E constante, una carga R resistiva y un condensador C, sin carga antes de cerrar el circuito:

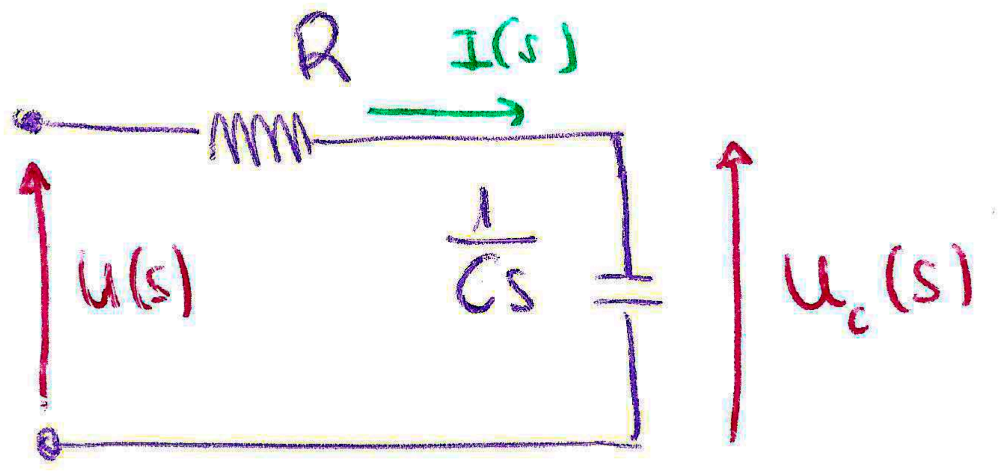


- Solo consideraremos que existen condiciones iniciales cuando:
  - ∃ corriente en una bobina
  - ∃ q o ddp en un condensador

- Podemos representar qué ocurre en el circuito al cerrar el interruptor obteniendo una función escalón:



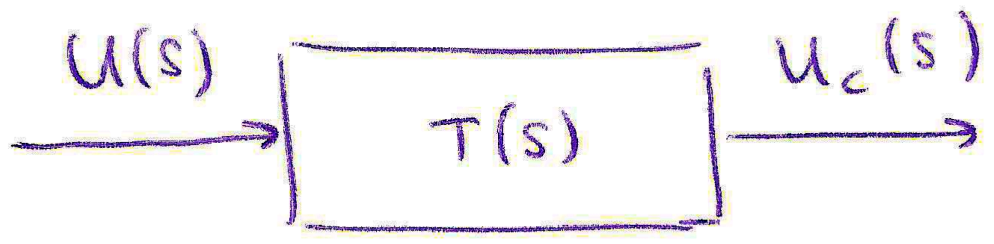
- Gracias a la inexistencia de condiciones iniciales en el circuito podemos pasar directamente al circuito análogo con la transformada de Laplace:



- Del análisis del circuito obtenemos:

$$\begin{cases} U(s) = I(s)\left(R + (Cs)^{-1}\right) \\ U_c(s) = I(s)\,(Cs)^{-1} \end{cases}$$

$$\boxed{U_c(s) = U(s) \cdot \frac{1}{1 + RCs}}$$



- A partir de este resultado podemos alcanzar la función $u_c(t)$ utilizando la antitransformada $\mathcal{L}^{-1}(U_c(s))$

- Para obtener antitransformadas se suelen utilizar relaciones tabuladas para las funciones más comunes como:

• escalón de altura X_0 en $t=0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(u(t)) = \frac{X_0}{s} = U(s)$

• antitransformada de $\frac{1}{s+a}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$

• transformadas senoidales: $\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$; $\mathcal{L}(\text{sen}(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

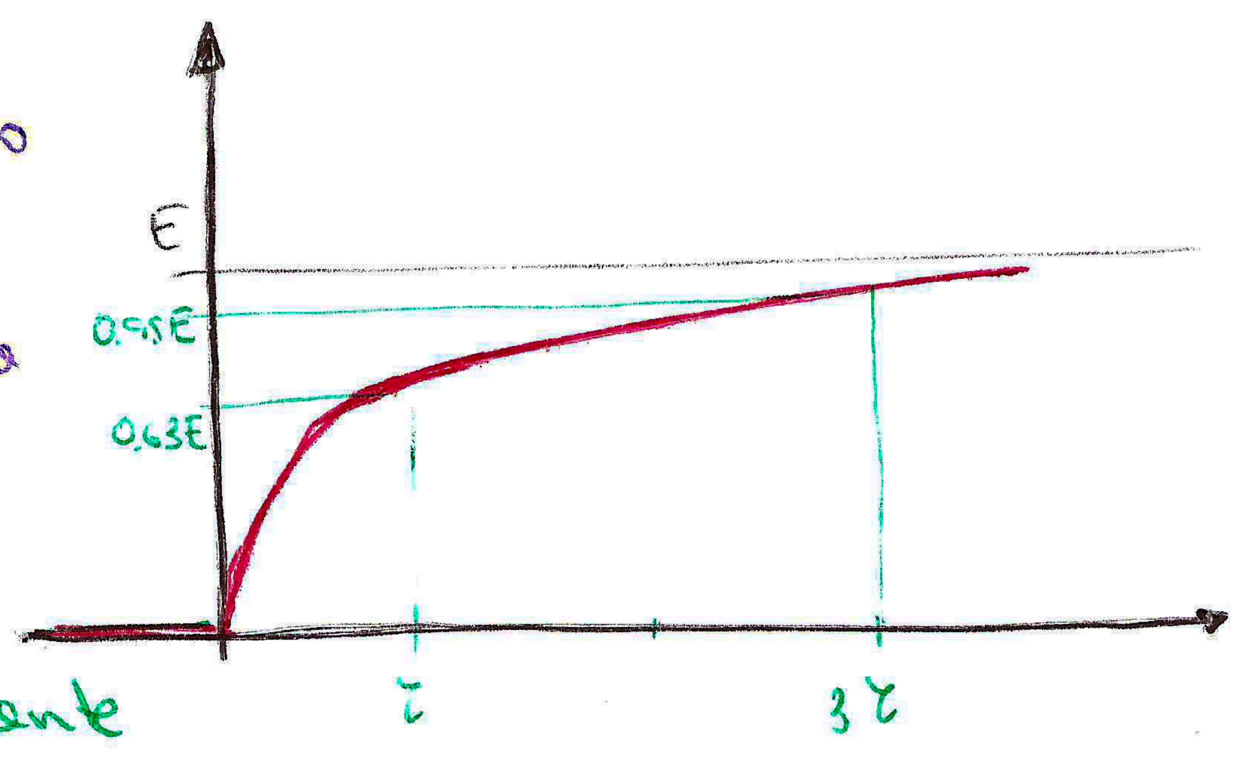
... definimos $\tau = RC$ como la constante de tiempo y recordando que $U(s) = \frac{E}{s}$, alcanzamos:

$$U_c = \frac{1}{1+\tau s} \cdot \frac{E}{s} \xrightarrow[\text{fracciones simples}]{\text{separando en}} \frac{A}{1+\tau s} + \frac{B}{s} = \frac{As + B(1+\tau s)}{s(1+\tau s)} = \frac{E}{s(1+\tau s)}$$

$$As + B + \tau Bs = E \xrightarrow{\text{como } s \text{ es aleatoria}} B = E \; ; \; A + \tau B = 0 \rightarrow A = -\tau E$$

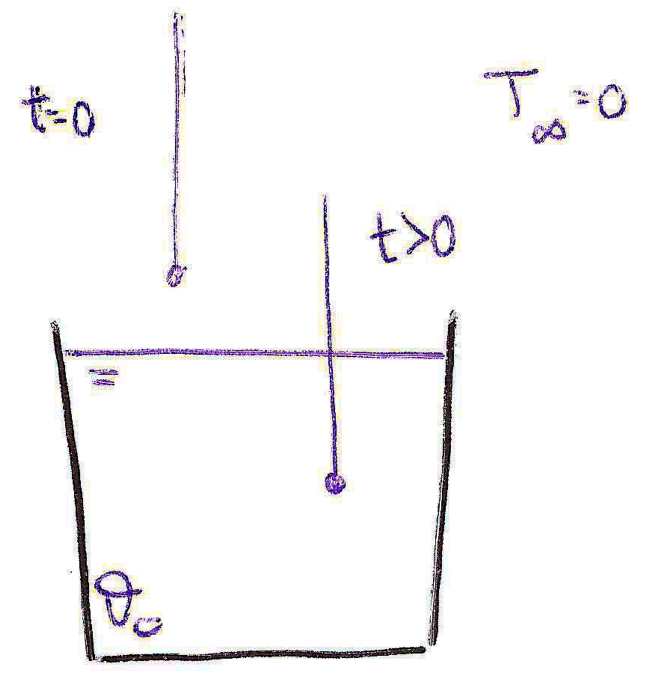
$$U_c = E\left(\frac{-\tau}{1+\tau s} + \frac{1}{s}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

- Podemos estudiar ya el comportamiento de $u_c(t)$ que tiende a E y parte de cero.

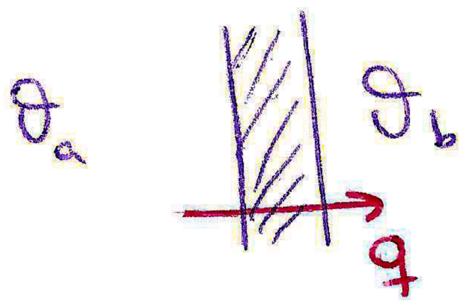


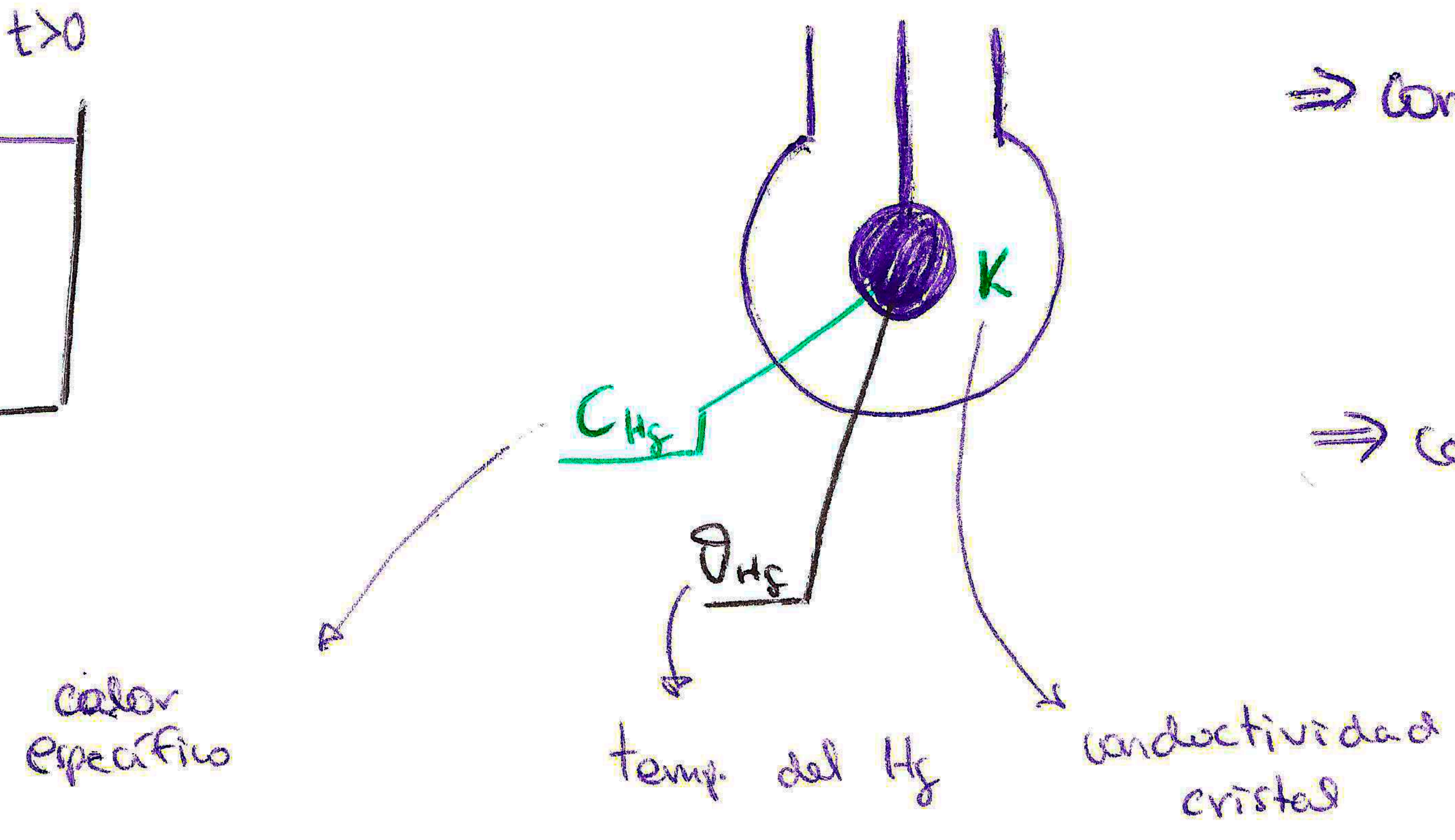
Decimos que ha alcanzado el régimen permanente en $3\tau \rightarrow 0.95E$ o en $5\tau = 0.99E$

Ejemplo: modelo térmico: modelizar el comportamiento de un termómetro de mercurio que se sumerge de golpe en una bañera caliente.



Modelo del termómetro:



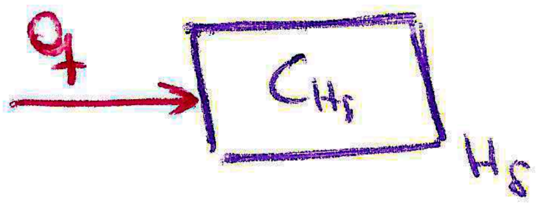


⇒ Conducción cristal ⤳ resist. térmica

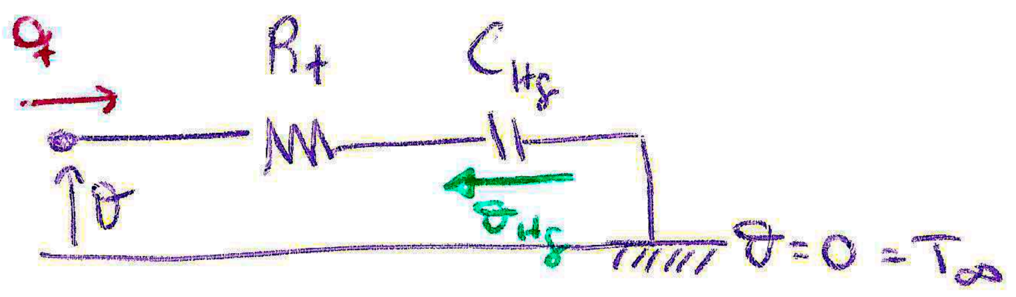
$$q = \frac{\vartheta}{R_t} = \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{R_t}$$

⇒ calentamiento Hg ⤳ cond. térmica

$$q = C_{Hg} \frac{d\vartheta}{dt}$$



cto. térmico:



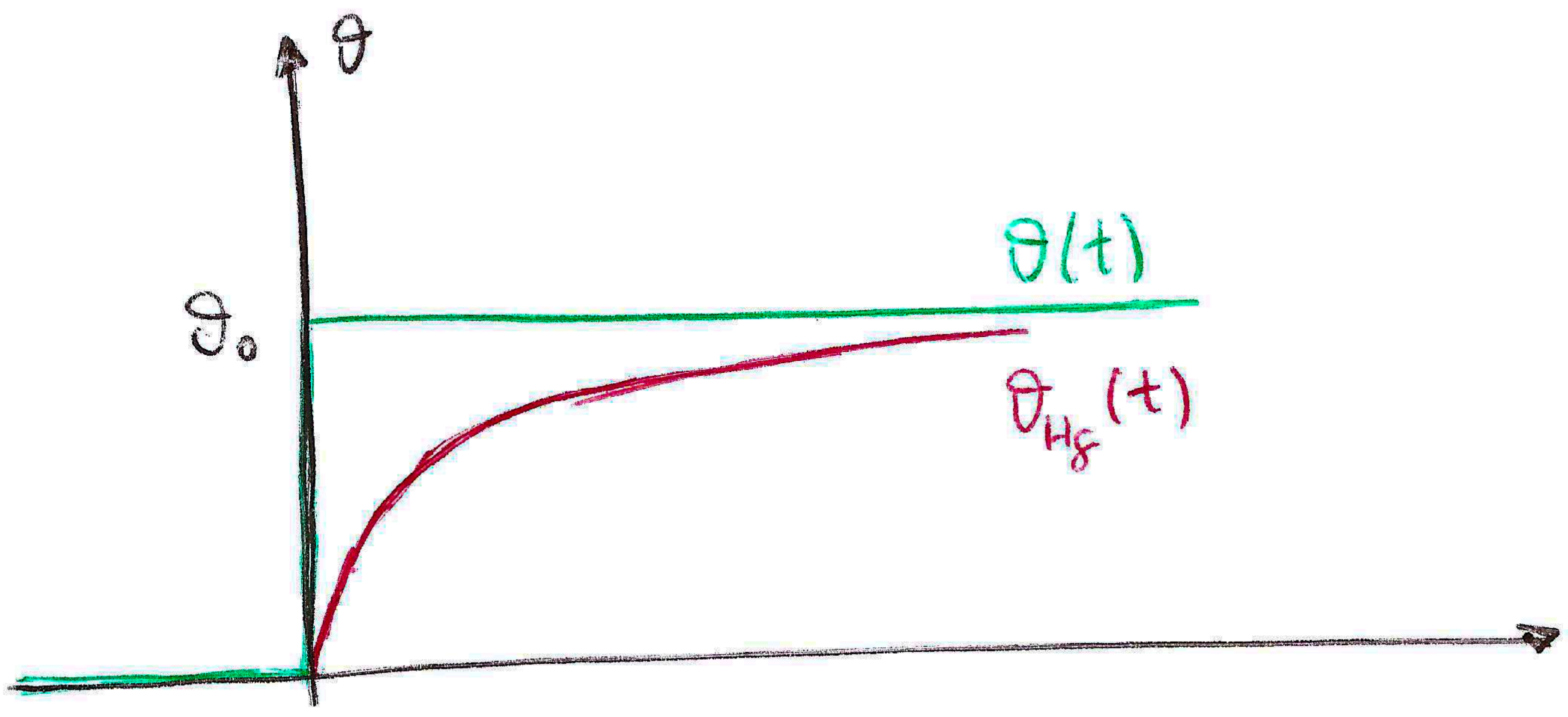
$$\vartheta_{Hg}(t) \Rightarrow \Theta_{Hg}(s) = \frac{1}{1+\tau s}\,\Theta(s)$$

... donde $\tau = R_t C_{Hg} = [s]$

Modelo del fenómeno:

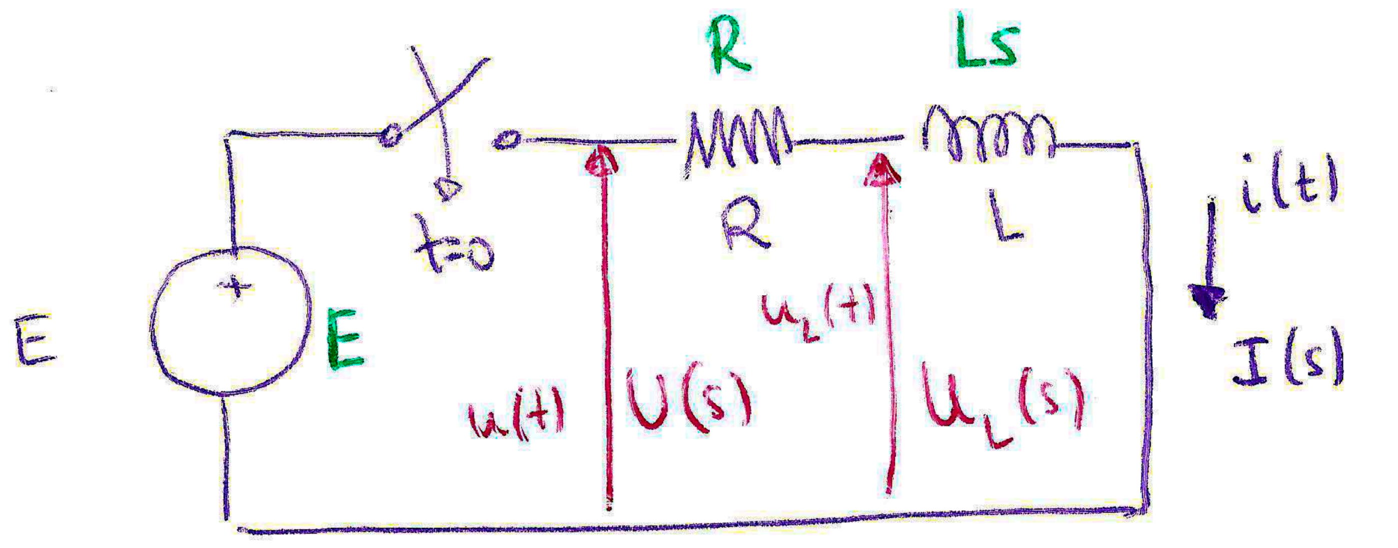
$$\Theta(s) = \frac{\vartheta_0}{s} \rightarrow \Theta_{Hg}(s) = \frac{1}{1+\tau s}\frac{\vartheta_0}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{\vartheta_{Hg}(t) = \vartheta_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

Luego para minimizar el tiempo de espera hasta que el termómetro se estabiliza, es decir, reducir la constante de tiempo τ debemos usar paredes más finas y conductoras ($R_t \downarrow$), así como la menor cantidad posible de mercurio ($C_{Hg} \downarrow$).



2. CIRCUITO RL SIN CONDICIONES INICIALES

- Para un circuito sencillo con alimentación continua E y carga resistiva R en serie con una inductancia L, siguiendo el mismo procedimiento que en el circuito RC obtendremos:



$$U(s) = I(s)\left[R + Ls\right]$$

$$U_L(s) = I(s) \cdot Ls$$

- Para analizar la intensidad:

$$I(s) = \frac{U(s)}{R + Ls} \xrightarrow[\text{escalón}]{\text{si } U(s) \text{ es}} I(s) = \frac{1}{R + Ls}\,\frac{E}{s}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad \text{...donde } \tau = \frac{L}{R}$$

- Para la tensión en la bobina:

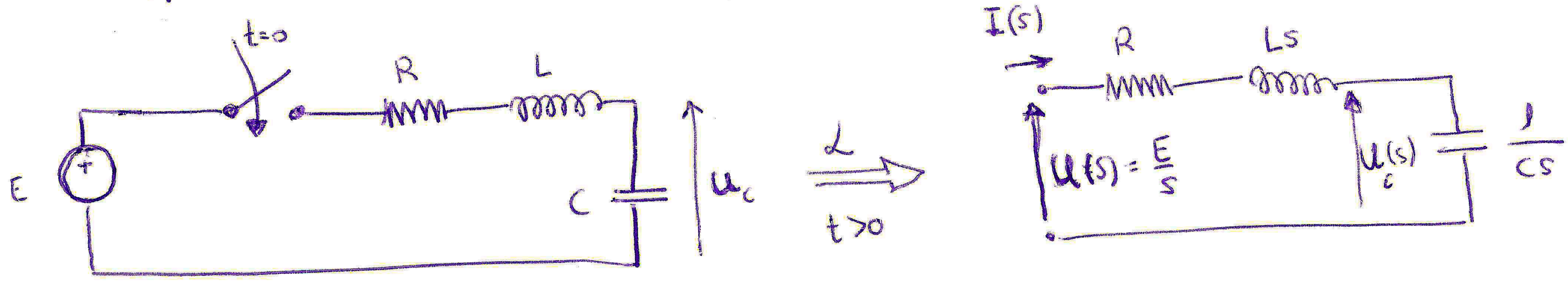
$$U_L(s) = \frac{L\cancel{s}}{R + Ls}\,\frac{E}{\cancel{s}} = E\,\frac{1}{\frac{R}{L} + s} \Longrightarrow \boxed{u_L(t) = E\,e^{-\frac{R}{L}t}}$$

- Trabajando con funciones complejas no siempre será posible obtener la función antitransformada recurriendo a datos que nos ayuden a conocer el comportamiento del circuito con:

teorema de valor
- inicial $u(t{=}0) = \lim_{s\to\infty} U(s)\cdot s$
- final $u(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} U(s)\cdot s$

3. CIRCUITO RLC SIN CONDICIONES INICIALES

- Para estudiar un circuito RLC sin condiciones iniciales, con fuentes de alimentación continuas, procedemos de manera análoga a cualquier circuito sin condiciones iniciales, tomando la tensión entre los bornes del condensador como función respuesta:



- Obtendremos una función de transferencia cuyo denominador será del mismo grado que dispositivos acumulativos de energía

$$\left.\begin{aligned} U(s) &= I\cdot\left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) \\ U_c(s) &= I\,\frac{1}{Cs} \end{aligned}\right\} \quad U_c(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}\,U(s)$$

$$\boxed{U_c(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\,\frac{E}{s}}$$

- Para estudiar este tipo de sistemas los únicos que pueden ser oscilatorios, ya que poseen capacitores e inductancias disponemos de la fórmula general:

$$\boxed{U_1(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}\,\frac{E}{s}}$$

ω_0 = pulsación propia

- Si queremos averiguar la antitransformada de esta expresión, el paso previo separar en fracciones simples nos obliga a buscar las raíces del polinomio en el denominador:

$$U_1(s) = E\left(\frac{A}{s+\underbrace{s_1}_{} } + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{s}\right) \mathcal{L}^{-1} \left| \frac{C}{S} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C \; ; \; \frac{A}{s+s_1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A e^{-s_1 t} \right|$$

raíces de $P_z(s)$

- Buscando las raíces del polinomio sobre la expresión general:

$$\boxed{s = \frac{-2z\omega_0 \pm \sqrt{4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \omega_0\left(-z \pm \sqrt{z^2-1}\right)}$$

Para el circuito RLC: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $z = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

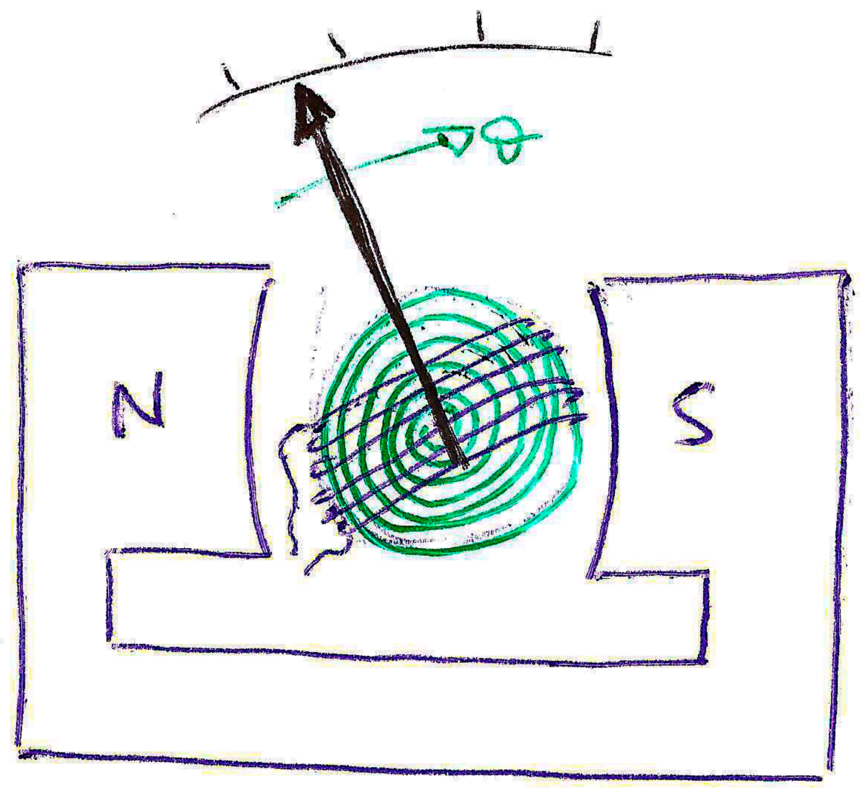
- Los resultados posibles varían según los valores de z:

$z > 1 \Rightarrow$ AMORTIGUADO $\Rightarrow$ raíces reales distintas negativas que proporcionan una función exponencial negativa asintótica al cero.

$z = 1 \Rightarrow$ CRÍTICO $\Rightarrow$ raíces reales iguales

$z < 1 \Rightarrow$ OSCILATORIO AMORTIGUADO $\Rightarrow$ raíces imaginarias que proporcionan una solución senoidal modulada por funciones exponenciales que la amortiguan

CASO REAL: VOLTÍMETRO DE BOBINA MÓVIL



- El análisis de un sistema real como el voltímetro de bobina móvil, cuyos principios electromagnéticos ya expusimos en temas anteriores, debe comenzar con la identificación de todos los fenómenos que intervienen:

FAVORECE EL GIRO $\Rightarrow$ par motriz magnético: $M_{motriz} = K_0 \cdot i$

K_0 → características magnéticas; i → corriente ⇝ Ⓐ

DIFICULTA EL GIRO $\Rightarrow$ par elástico del muelle: $M_{muelle} = K \cdot \theta$

$\Rightarrow$ par del rozamiento: $M_{rozamiento} = B \cdot \omega$

$\Rightarrow$ par resistente del momento de inercia: $M_{inercia} = J \cdot \alpha$

- Con estos elementos construimos la ecuación del sistema y buscamos la función que relacione el ángulo girado con la intensidad de corriente:

tiempo: complejo:

$$K_0 i = k \cdot \theta + B\omega + J\alpha = K\theta + B\frac{d\theta}{dt} + J\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow K_0 I = K\theta + Bs\theta + Js^2\theta = \theta(s)\left[K + Bs + Js^2\right]$$

- Hemos alcanzado una expresión del ángulo girado con un denominador de segundo orden y coeficientes constantes

$$\boxed{\theta(s) = \frac{K_0}{K}\,\frac{K/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}}\,I}$$

– Aplicando la intensidad como una función escalón y comparando con el caso general obtenemos:

$$\theta(s) = \frac{K_0}{K} \frac{K/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{K}{J}} \frac{I_0}{s} \rightleftarrows U(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2z\omega_0 s + \omega_0^2} \frac{E}{s}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}} \qquad z = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{1}{JK}}}$$

recordando que las raíces son:

$$s = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

... tendremos como resultados posibles:

$z > 1 \Rightarrow$ raíces reales y distintas $\Rightarrow$ sobreamortiguado → no oscila

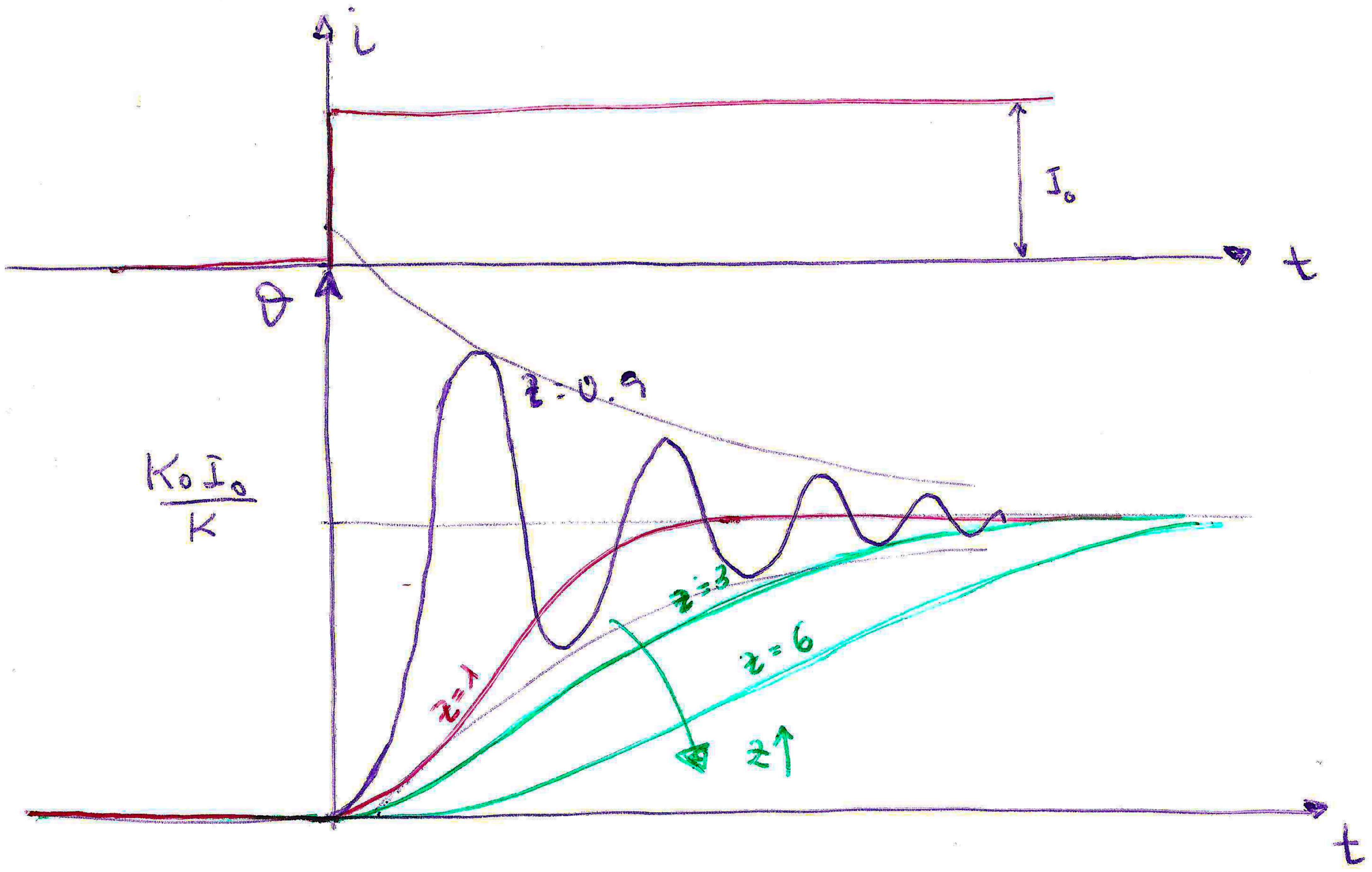
$$\theta(t) = \frac{K_0}{K} I_0 \left(1 - \frac{s_2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}\right) \qquad s_1, s_2 \in \mathbb{R}^-_*$$

$z < 1 \Rightarrow$ raíces imaginarias conjugadas $\Rightarrow$ subamortiguamiento → oscila

$$\theta(t) = \frac{K_0}{K} I_0 \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1 - z^2}} e^{-z\omega_0 t} \operatorname{sen}(\omega_r t)\right) \qquad \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

↓ pulsación de resonancia

– ... representando el sistema en el tiempo:



teoremas:

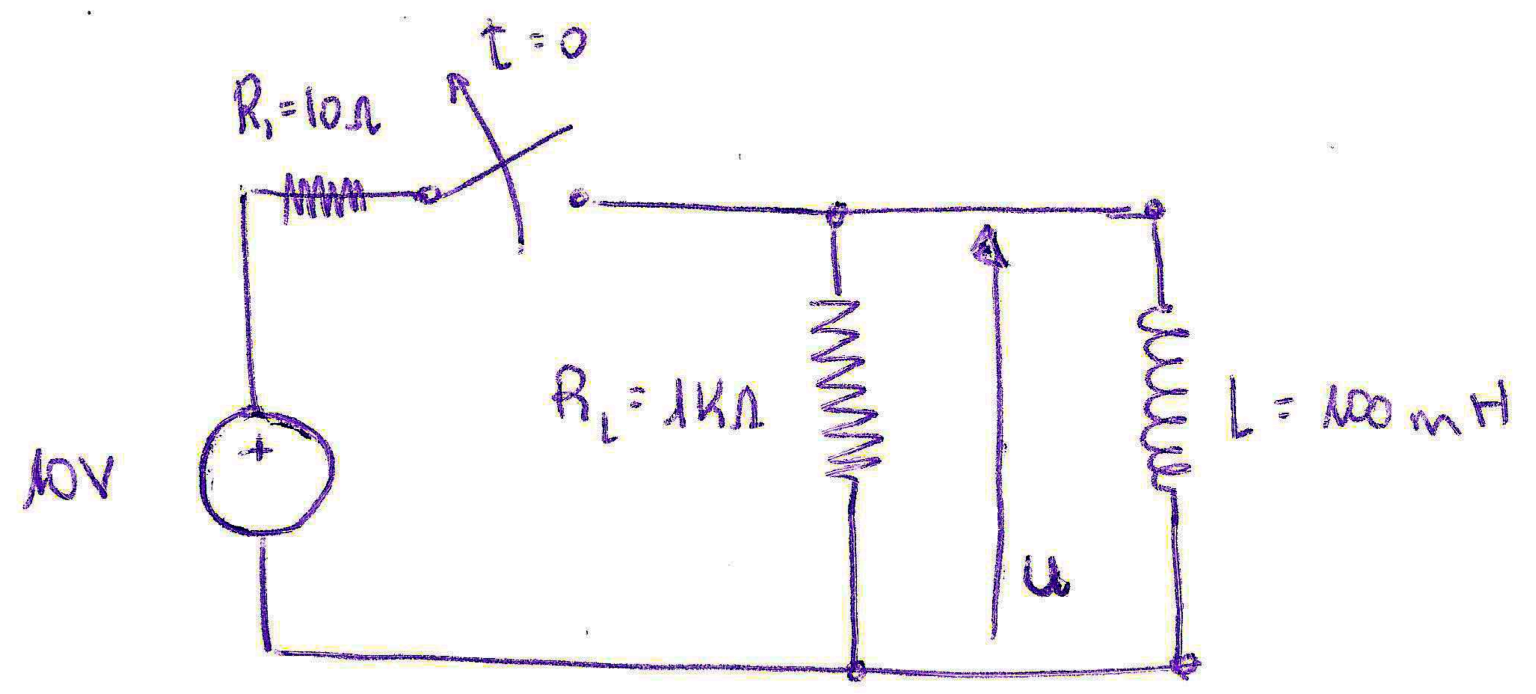
$$\theta(0) = \lim_{s \to \infty} \theta(s) \cdot s = 0$$

$$\theta(\infty) = \lim_{s \to 0} \theta(s) \cdot s = \frac{K_0 I_0}{K}$$

- El amperímetro ideal será aquel que más se acerque al amortiguamiento crítico o esté ligeramente por debajo de él, para que el tiempo de estabilización de la medida sea pequeño.

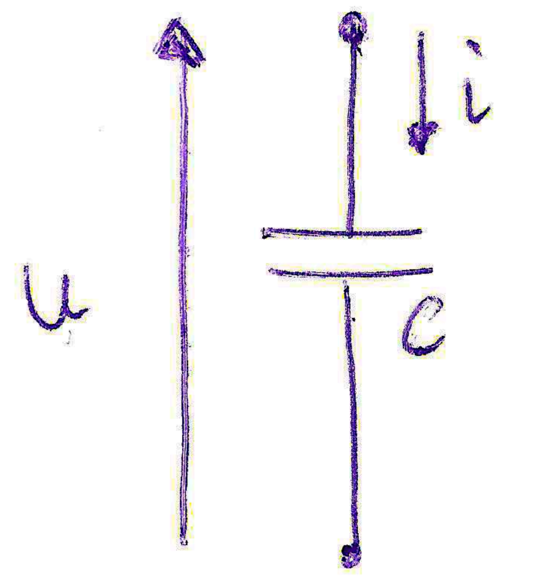
- Si deseamos cambiar el movimiento de la aguja suponiendo que no podemos cambiar el muelle K, ni las condiciones magnéticas K_0 debemos cambiar el momento de inercia de la aguja J, tratando de reducirlo con menos masa y ampliar las pérdidas en rozamiento con una banderola o un líquido.

4. CIRCUITO RL CON CONDICIONES INICIALES



- Ante este tipo de circuitos, donde existen condiciones iniciales en los dispositivos acumuladores de energía ddp en un condensador o corriente en una bobina debemos separarlas:

→ CONDENSADOR CON CONDICIONES INICIALES

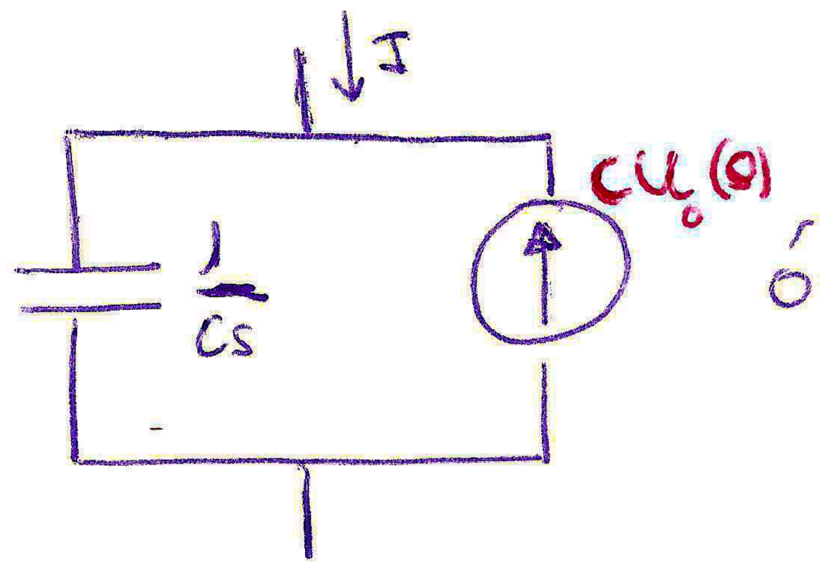


$$i = C\frac{du}{dt}$$

$$I(s) = C\cdot\left[sU(s) - u_0(0)\right]$$

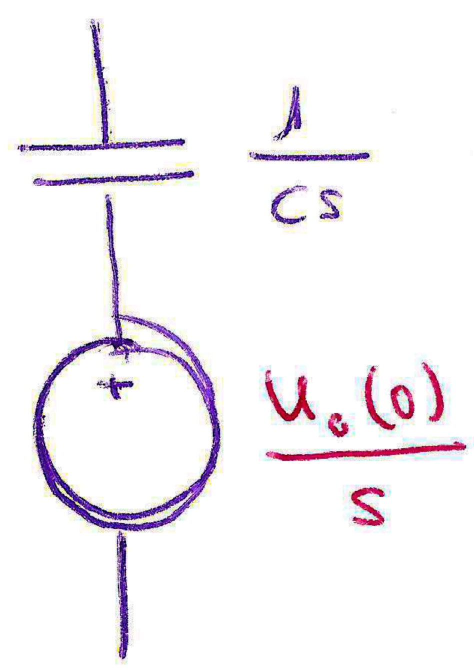
$$U(s) = \frac{I}{Cs} + \frac{u_C(0)}{s}$$

lo podemos separar como ⟹



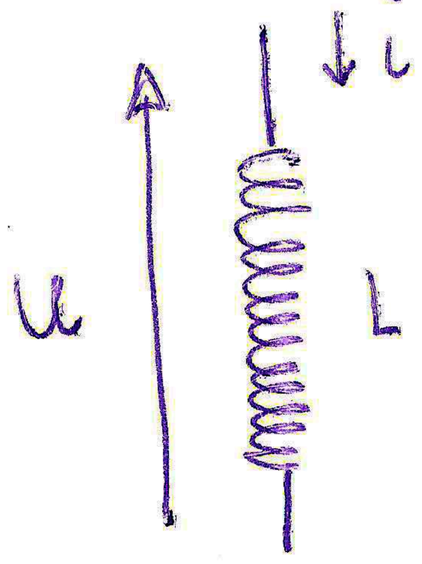
Mod. Norton: fuente de corriente constante

ó



Mod. Thévenin: fuente de tensión constante

→ INDUCTANCIA CON CONDICIONES INICIALES:



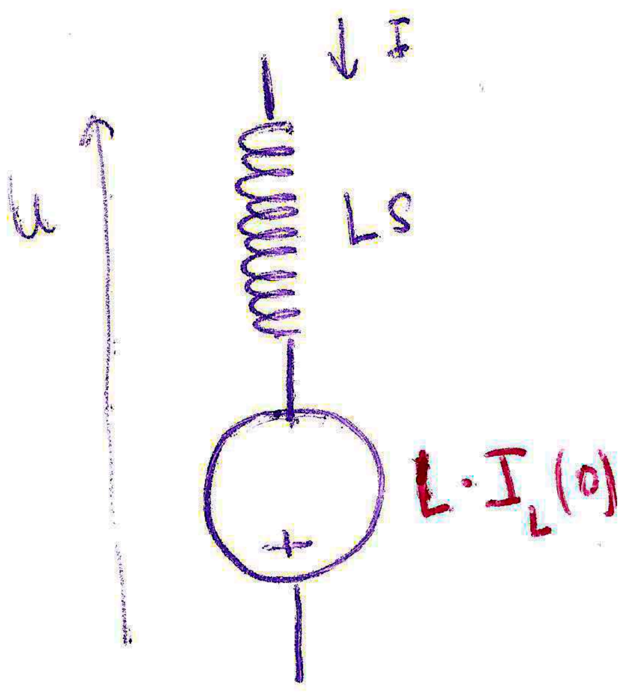
$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$U(s) = L\,(sI - I_L(0))$$

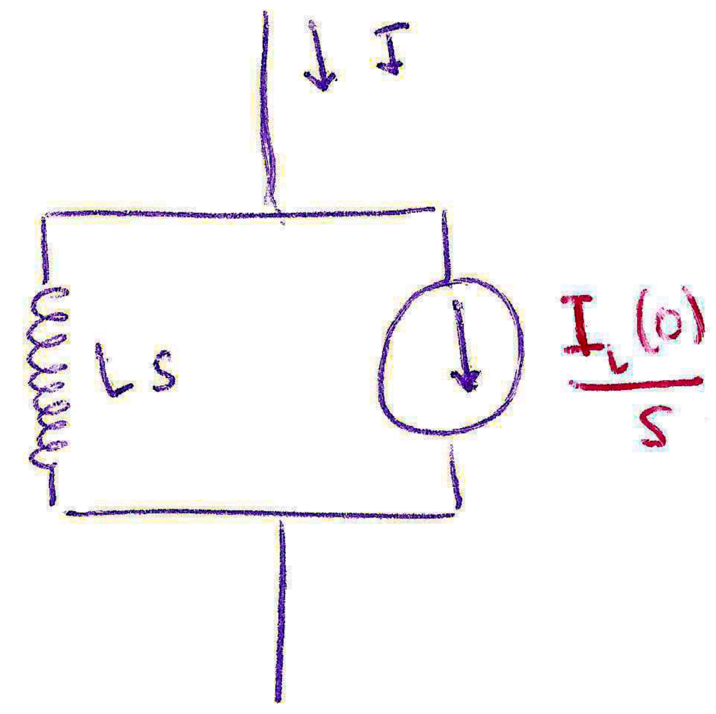
$$I(s) = \frac{U(s)}{Ls} + \frac{I_L(0)}{s}$$

$\Longrightarrow$



Mod: Thévenin

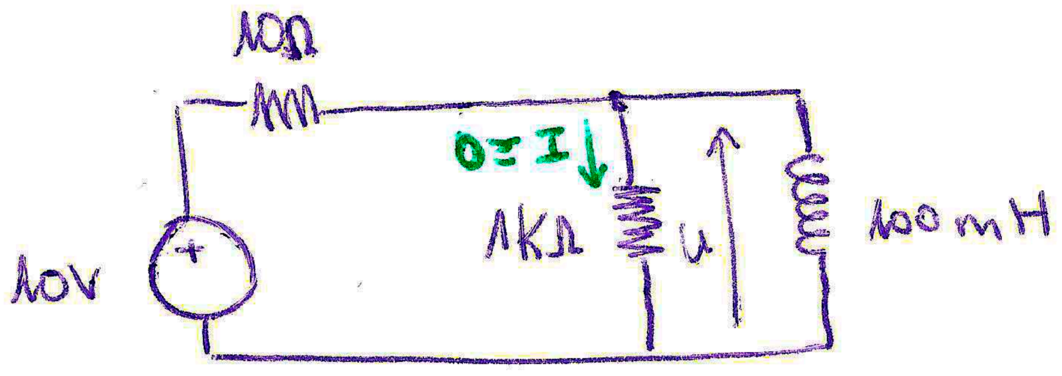
ó



Mod. Norton

- Ahora ya podemos aplicar la transformada de Laplace a nuestro circuito inicial, que lo resolveremos:

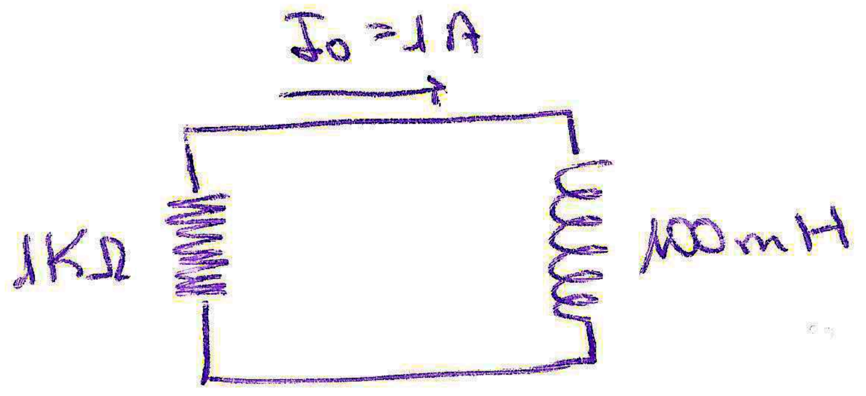
1) ESTUDIO DE LAS CONDICIONES INICIALES ($t<0$)



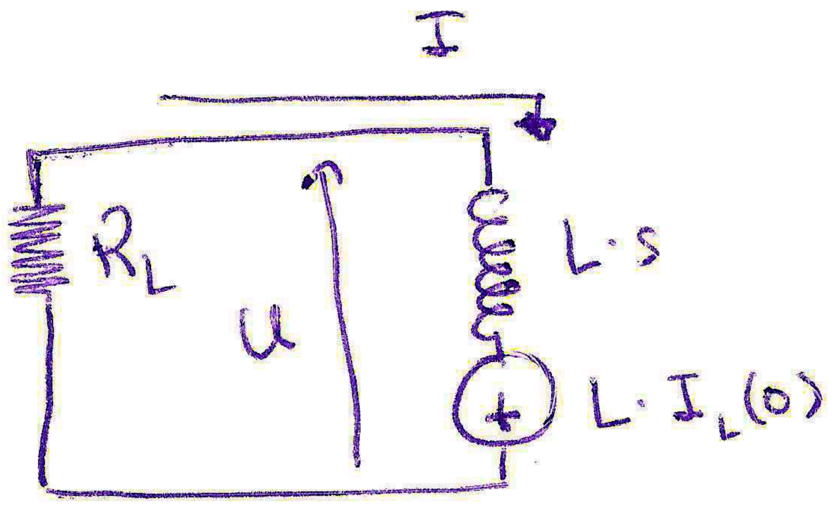
$I_L(0) = 1A$

$u_L(0) = 0V$ → fuente constante

2) CIRCUITO EQUIVALENTE TRAS $t=0$



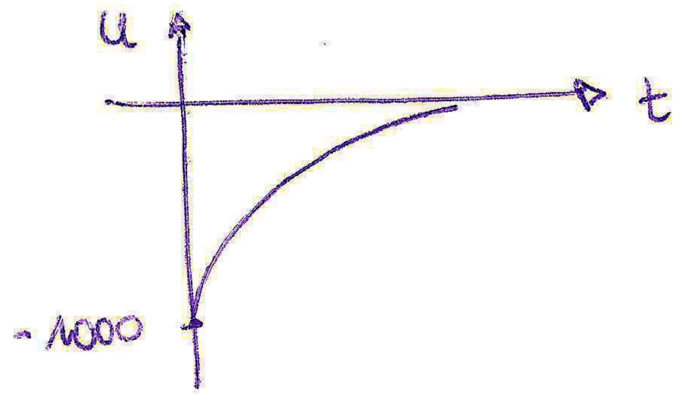
$\xrightarrow[\text{cond. iniciales}]{\text{separando las}}$



3) RESOLUCIÓN MATEMÁTICA:

$$\left.\begin{aligned} U &= -I \cdot R_L \\ U &= I \cdot Ls - LI_0 \end{aligned}\right\} \; U = -\frac{LI_0}{1 + \frac{Ls}{R_L}} = -I_0 \frac{R_L}{\frac{R_L}{L} + s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t)$$

$$\boxed{u(t) = -I_0 R_L \, e^{-\frac{L}{R_L}t}}$$

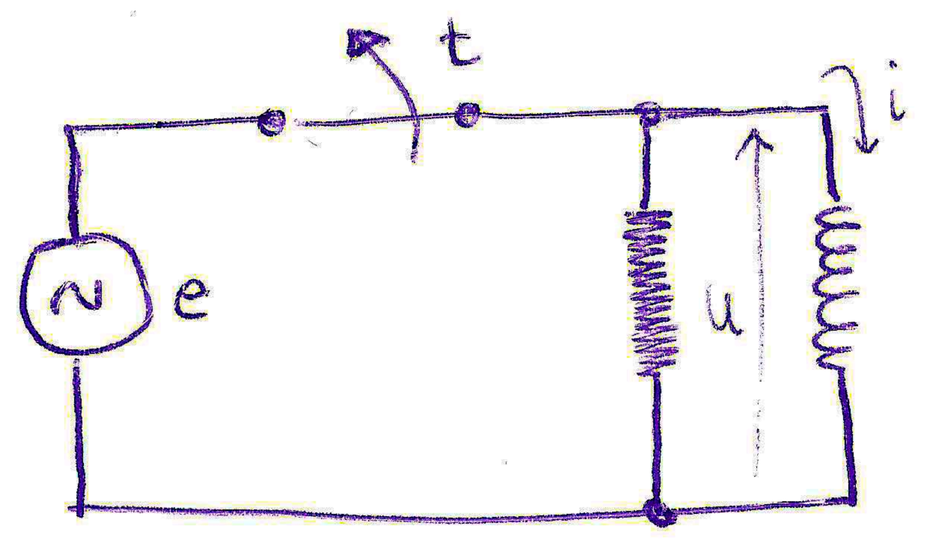


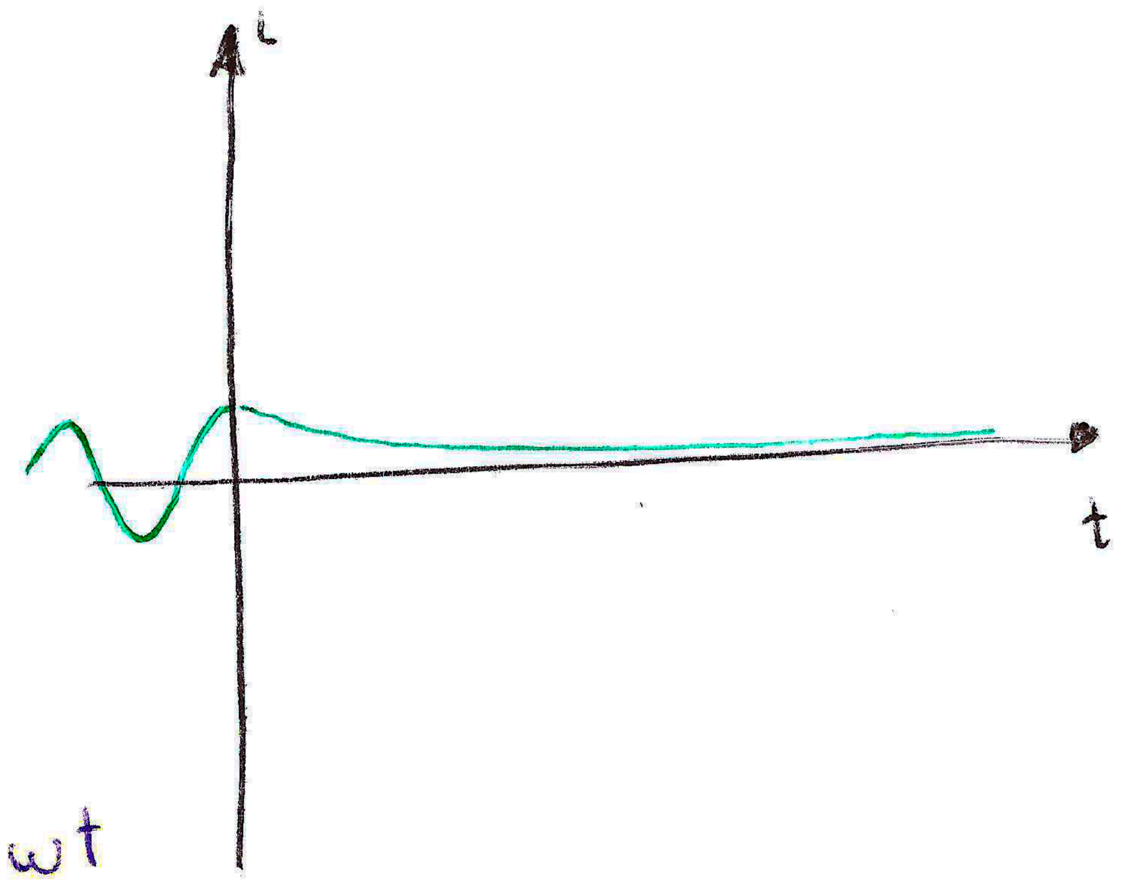
4) ORIENTACIÓN RESPUESTA → teoremas de valor inicial y final

$$u(0) = \lim_{s \to \infty} U(s) \cdot s = -1000V \quad ; \quad u(\infty) = \lim_{s \to 0} U(s) \cdot s = 0V$$

4.1. CIRCUITO CON CONDICIONES INICIALES Y AC

- Cuando disponemos de un circuito con dispositivos acumuladores de energía (L,C) con condiciones iniciales, es decir, con corriente a través de las inductancias o tensión en los bornes de los condensadores, y alimentación no continua aunque solo mencionaremos la senoidal, la solución del problema transitorio depende del valor que posea la alimentación ya sea corriente o tensión en el instante en el que cambian las condiciones del circuito.

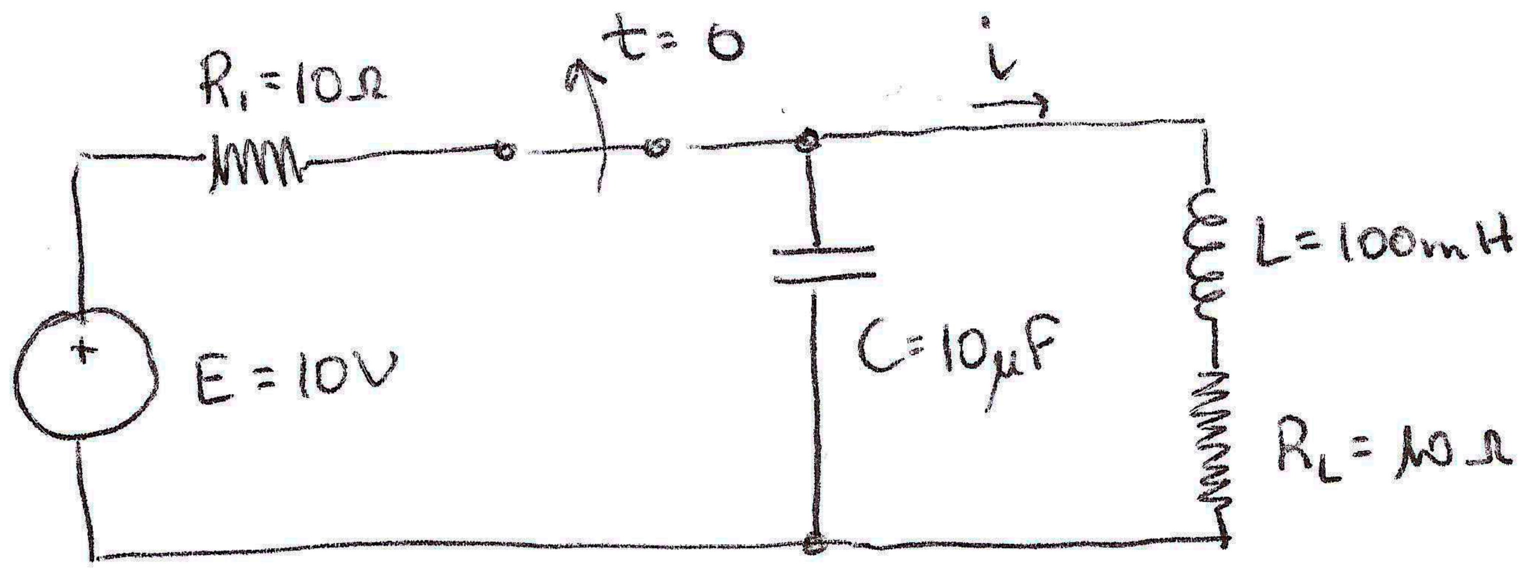




$e = E_0 \text{ sen } wt \rightarrow i = I_0 \text{ sen } wt$

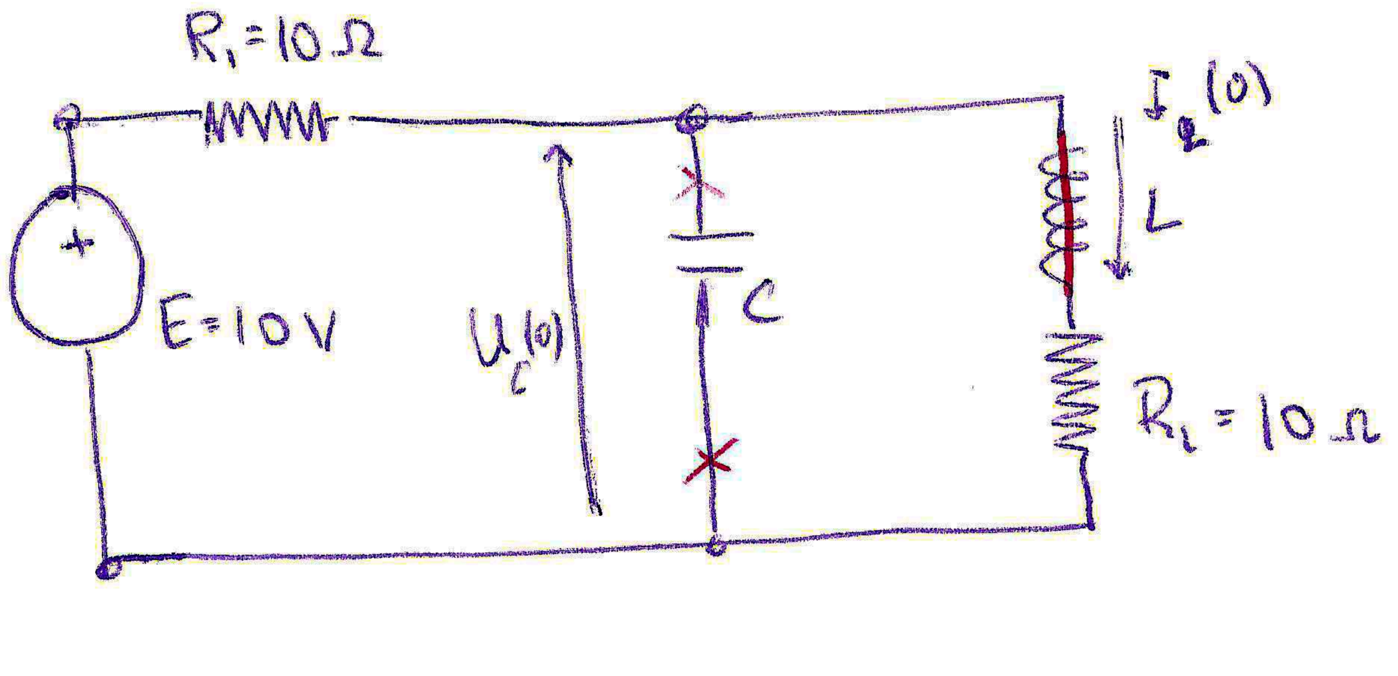
- De esta forma, si somos capaces (ya se hace con dispositivos electrónicos) de abrir el circuito en un valor instantáneo nulo, evitamos cualquier sobre tensión.

EJEMPLO:



Para resolver el circuito, como existen corrientes a través de bobinas y diferencias de tensión en los extremos del condensador, estudiamos y separamos condiciones iniciales.

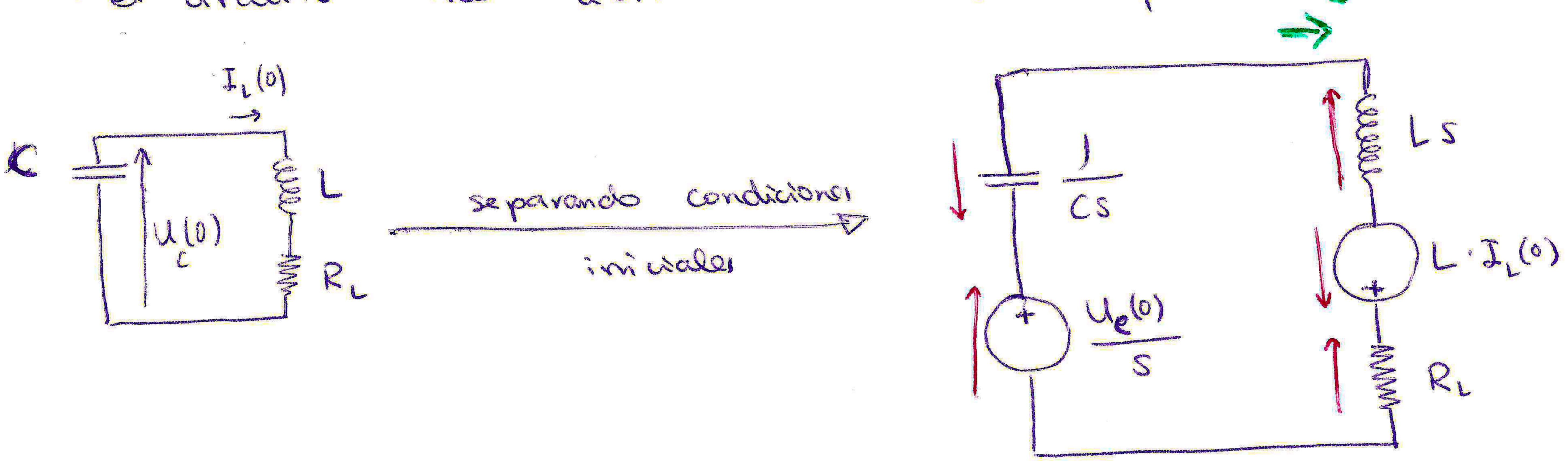
t<0



como $\frac{du}{dt} = \frac{di}{dt} = 0 \rightarrow u_L = 0 \;;\; I_C = 0$

$I_L(0) = \frac{10}{10+10} = 0.5 A \qquad u_C(0) = 10 \cdot 0.5 = 5V$

→ el circuito tras abrir el interruptor queda:



→ Estudiando el circuito para determinar la respuesta de la corriente:

la punta indica el mayor potencial

$$\left.\begin{aligned} U(s) &= I \cdot LS - L I_L(0) + I \cdot R_L \\ U(s) &= -\frac{I}{CS} + \frac{U_C(0)}{S} \end{aligned}\right\} \; I\left(LS + R_L + \frac{1}{CS}\right) - L I_L(0) - \frac{U_C(0)}{S} = 0$$

$$I(S) = \frac{L I_L(0)}{LS + R_L + \frac{1}{CS}} + \frac{U_C(0)/S}{LS + R_L + \frac{1}{CS}} = I_L(0) \frac{S}{S^2 + \frac{R_L}{L} S + \frac{1}{LC}} + \frac{U_C(0)}{L} \frac{1}{S^2 + \frac{R_L}{L} S + \frac{1}{LC}}$$

sustituyendo valores numéricos: $I(S) = 0.5 \frac{S}{S^2 + 100S + 10^6} + 50 \frac{1}{S^2 + 100S + 10^6}$

→ Podemos aproximar la forma de la antitransformada:

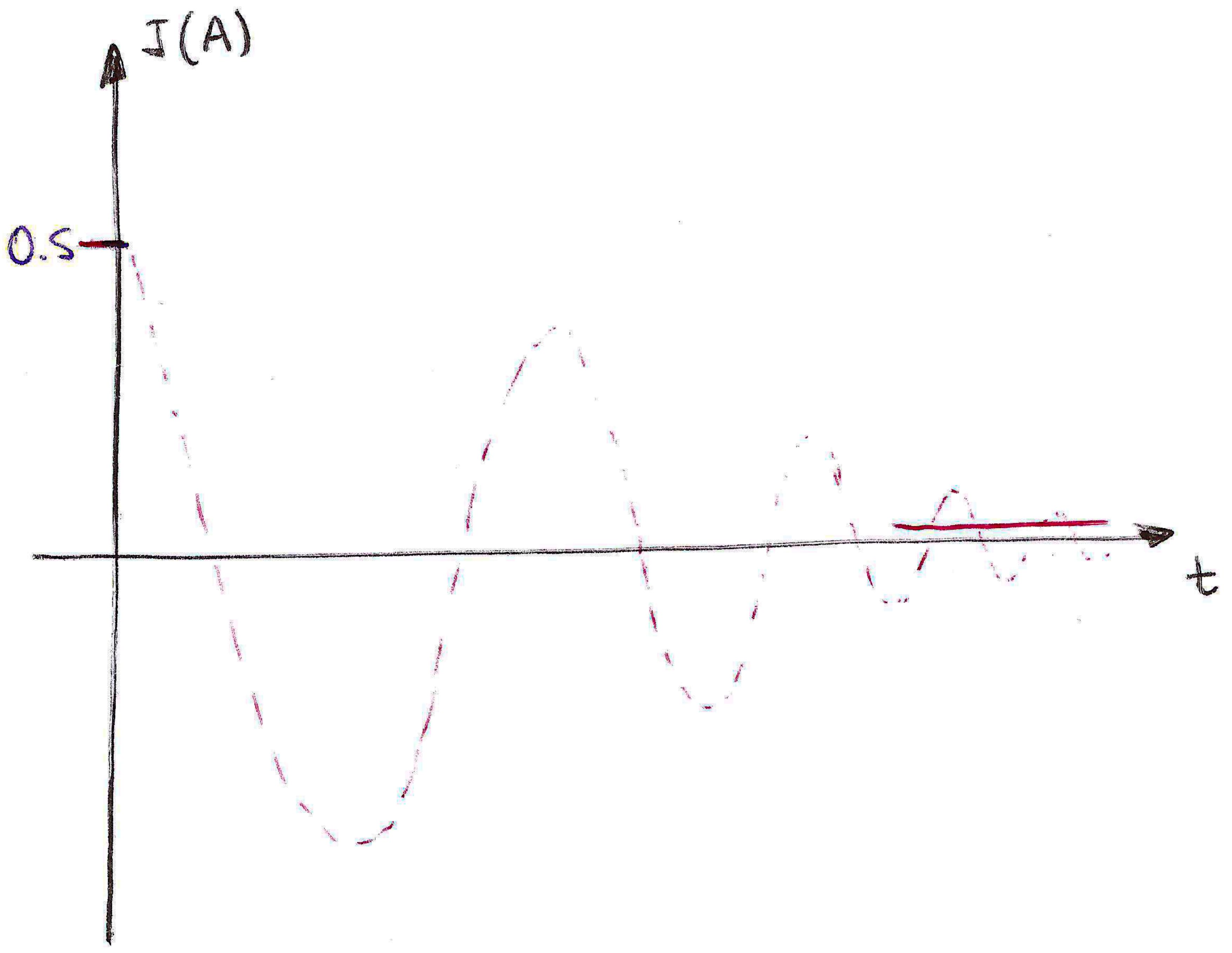
$$I(0) = \lim_{S \to \infty} I(S) \cdot S = 0.5\,A$$

$$I(\infty) = \lim_{S \to 0} I(S) \cdot S = 0\,A$$

si $S^2 + 2\zeta\omega_0 S + \omega_0^2 = S^2 + 100S + 10^6$

$$\zeta = \frac{100}{2\omega_0} = \frac{100}{2 \cdot (10^6)^{\frac{1}{2}}} = 0.05$$

muy subamortiguado → oscila



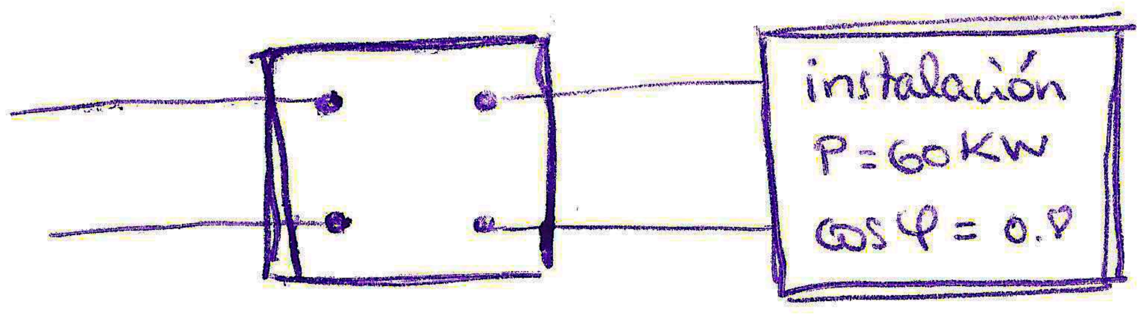
5. MODELO TÉRMICO DE UN TRANSFORMADOR

- La vida de los dispositivos eléctricos se encuentra muy condicionada por las condiciones ambientales en que trabajen y muy especialmente de la temperatura.

- Para el transformador de potencia las fuentes de calor internas son debidas a las pérdidas en el cobre efecto Joule y las pérdidas en el hierro corrientes Foucault + histéresis

- Estudiando la conexión de un transformador a la red para disponer de una entrada escalón partiendo del equilibrio térmico.

→ Partiendo del caso:... buscamos responder a las preguntas:



1. ¿qué temperatura tendrá el transformador en media hora?
2. ¿Cuál sería la máxima temperatura que alcanzará el transformador?

Prop. eléctricas:

$S_n = 100$ KVA

U_{1N}/U_{2N}

$\varepsilon_{cc} = 5\%$ | $P_{Fe} = 1.5\%$

$P_{cc} = 2\%$

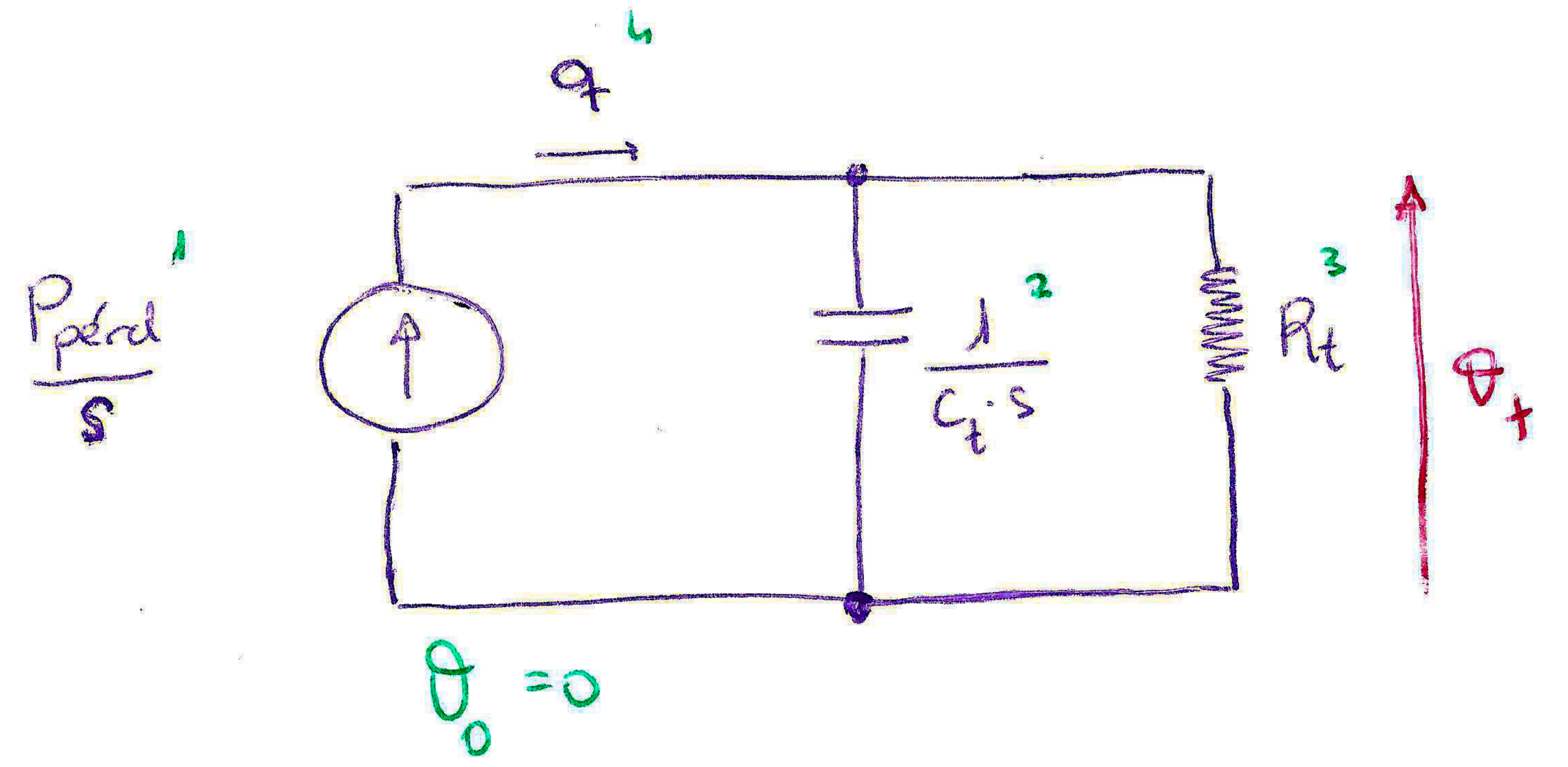
Prop. térmicas:

$R_{tér} = 0.02\ K \cdot W^{-1}$

$C_t = 5 \cdot 10^5\ J \cdot K^{-1}$

$\theta_{t0} = 25°C$

- Utilizando la hipótesis de que todo el calor desprendido por el transformador se emplea en aumentar su temperatura y la de sus alrededores, podemos realizar un modelo eléctrico que represente el comportamiento térmico.



1. generación de calor en las pérdidas → transf. de la función escalón al enchufar el trafo

2. acumulación de energía térmica en la masa del trafo en forma de temperatura

3. Resistencia térmica de transmisión → coeficiente global que incluye la transferencia de calor por conducción, convección y radiación

4. Flujo de calor

$$P_{pérd} = P_{Cu} + P_{Fe} = 0.02 \cdot 100\,000 \cdot C^2 + 0.015 \cdot 100\,000 = \overset{2625}{} \text{ W}$$

$$C = \frac{S}{S_n} = \frac{P}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{S_n} = \frac{60\,000}{0.8} \cdot \frac{1}{100\,000} = 0.75$$

$$\theta_t(s) = \frac{P_{pérd}}{s}\left[\frac{R_t \cdot \frac{1}{C_t \cdot s}}{R_t + \frac{1}{C_t \cdot s}}\right] = \frac{P_{pérd}}{s} \, \frac{1}{C_t} \, \frac{1}{s + \frac{1}{R_t \cdot C_t}}$$

sustituyendo: $$\theta_t(s) = \frac{5.25 \cdot 10^{-3}}{s^2 + 10^{-4} s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 10^{-4}} = \frac{52.5}{s} + \frac{-52.5}{s + 10^{-4}}$$

$A + B = 0 \qquad 10^{-4} A = 5.25 \cdot 10^{-3}$

$$\mathcal{L}^{-1}(\theta_t(s)) \rightarrow \boxed{\theta_t(t) = 52.5\left(1 - e^{-10^{-4} t}\right)}$$

- podemos ya resolver ambas preguntas:

$t = 30' \cdot 60'' = 1800 \text{ s} \longrightarrow \theta_t = 52.5\left(1 - e^{-10^{-4} \cdot 1800}\right) = 8.65°C \rightarrow T_{trafo} = 25 + \theta_t = 33.65°C$

$T_{max} \rightarrow \theta_t^{max} = 52.5 \rightarrow \boxed{T_{trafo}^{max} = 52.5 + 25 = 77.5\,°C}$